Tentamen Lineaire Algebra I

31 januari 2013

university of groningen

Het tentamen bestaat uit 6 vraagstukkken. U krijgt 180 minuten om deze vraagstukken te beantwoorden. De puntenwaardering kunt u vinden aan het begin van de vraagstukken. U krijgt 10 punten gratis. Het totale aantal punten die u kunt bereiken is 100. Each question is also translated into English. You may answer in Dutch or English.

1. (Nederlands) [**4+2+4+4 Punten.**]

Gegeven is de matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 2 & 5 & 1 \\ 4 & 10 & -1 \end{pmatrix}.$$

(a) Bepaal de rij-echelonvorm van A.

(b) Bepaal de rang van A.

(c) Bepaal de oplossingsverzameling van het homogene stelsel $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

(d) Laat de vector $\mathbf{b}$ gegeven zijn door

$$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Bepaal de oplossingsverzameling van het stelsel $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$.

1. (English) [**4+2+4+4 Points.**]

Let A be the matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 2 & 5 & 1 \\ 4 & 10 & -1 \end{pmatrix}.$$

(a) Determine the row-echelon form of A.

(b) Determine the rank of A.

(c) Determine the set of solutions of the homogeneous system $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

(d) Let $\mathbf{b}$ be the vector

$$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Determine the set of solutions of the system $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$.

2. (Nederlands) [4+4+6 **Punten.**]

Stel A is een $m \times n$ matrix en $b \in \mathbb{R}^m$. Beschouw het stelsel lineaire vergelijkingen $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, met onbekende $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$. Laat $R(A)$ de kolomruimte van A zijn, i.e. de deelruimte van $\mathbb{R}^m$ opgespannen door de kolommen van A. Laat $N(A)$ de oplossingsverzameling zijn van het bijbehorende homogene stelsel $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

(a) Toon aan dat het stelsel $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ een oplossing heeft dan en slechts dan als $\mathbf{b} \in R(A)$.

(b) Toon aan dat $N(A) = \{\mathbf{0}\}$ dan en slechts dan als de kolommen van A lineair onafhankelijk zijn.

(c) Stel $\mathbf{b} \in R(A)$. Toon aan dat $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ precies één oplossing $\mathbf{x}$ heeft dan en slechts dan als de kolommen van A lineair onafhankelijk zijn.

2. (English) [4+4+6 **Points.**]

Let A be an $m \times n$ matrix and $b \in \mathbb{R}^m$. Consider the system of linear equations $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, with unknown $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$. Let $R(A)$ be the column space A, i.e. the subspace of $\mathbb{R}^m$ spanned by the columns of A. Let $N(A)$ be the set of solutions of the corresponding homogeneous system $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

(a) Show that the system $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ has a solution if and only if $\mathbf{b} \in R(A)$.

(b) Show that $N(A) = \{\mathbf{0}\}$ if and only if the columns of A are linearly independent.

(c) Suppose $\mathbf{b} \in R(A)$. Show that $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ has exactly one solution $\mathbf{x}$ if and only if the columns of A are linearly independent.

3. (Nederlands) [4+4+4 **Punten.**]

(a) Stel dat A en B inverteerbare matrices zijn, en X een matrix zodat $AXB = A + B$. Bepaal X.

(b) Stel A en B vierkante matrices zodanig dat $AB = BA$. Toon aan dat $(AB)^T = A^T B^T$.

(c) Toon aan: als A inverteerbaar is, dan is ook A^T inverteerbaar, en $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.

3. (English) [4+4+4 **Points.**]

(a) Let A en B be invertible matrices, and let X be a matrix such that $AXB = A+B$. Determine X.

(b) Let A and B be quadratic matrices such that $AB = BA$. Show that $(AB)^T = A^T B^T$.

(c) Show that if A is invertible, then A^T is also invertible and $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.

4. (Nederlands) [3+2+4+4+4+3 **Punten.**]

Voor een gegeven geheel getal n is P_n de vectorruimte van alle polynomen van graad kleiner dan n, met reële coefficienten.

(a) Geef een basis van P_n.

(b) Bepaal de dimensie van P_n.

Definieer de afbeelding $T : P_4 \to P_4$ door

$$T(p(x)) := p(x) - \frac{1}{2}x^2 p''(x).$$

(c) Laat zien dat T een lineaire afbeelding is.

(d) Bepaal de kern $\ker(T)$ van T.

(e) Bepaal de matrix $[T]_E$ van T ten opzichte van de geordende basis $E := \{1, x, x^2, x^3\}$.

(f) Bepaal de rang van $[T]_E$.

4. (English) **[3+2+4+4+4+3 Points.]**

Let n be a positive integer. Then P_n is the vector space of all polynomials of degree less than n, with real coefficients.

(a) Determine a basis of P_n.

(b) Determine the dimension of P_n.

Define the map $T : P_4 \to P_4$ as

$$T(p(x)) := p(x) - \frac{1}{2}x^2 p''(x).$$

(c) Show that T is a linear map.

(d) Determine the kernel $\ker(T)$ of T.

(e) Determine the matrix $[T]_E$ of T with respect to the ordered basis $E := \{1, x, x^2, x^3\}$.

(f) Determine the rank of $[T]_E$.

5. (Nederlands) **[4+2+8 Punten.]**

Voor elk tweetal vectoren $\mathbf{x}$ en $\mathbf{y}$ in $\mathbb{R}^n$ noteren we door $\mathbf{x}^T\mathbf{y}$ het gebruikelijke skalaire product. Stel dat $\mathcal{W}$ een deelruimte is van $\mathbb{R}^n$. We definieren het *orthogonale complement $\mathcal{W}^\perp$ van $\mathcal{W}$* door:

$$\mathcal{W}^\perp := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{x}^T\mathbf{y} = 0 \text{ voor alle } \mathbf{y} \in \mathcal{W}\}.$$

(a) Bewijs dat $\mathcal{W}^\perp$ een deelruimte is van $\mathbb{R}^n$.

(b) Bewijs dat $\mathcal{W} \cap \mathcal{W}^\perp = \{\mathbf{0}\}$.

(c) Laat A een matrix zijn zodat $\mathcal{W} = R(A)$ waarbij $R(A)$ de range van A is. Bewijs dat $\mathcal{W}^\perp = N(A^T)$ waarbij $N(A^T)$ de nulruimte van A^T is.

5. (English) **[4+2+8 Points.]**

For every two vectors $\mathbf{x}$ and $\mathbf{y}$ in $\mathbb{R}^n$, we denote by $\mathbf{x}^T\mathbf{y}$ the usual scalar product. Let $\mathcal{W}$ be a subspace of $\mathbb{R}^n$. We define the *orthogonal complement $\mathcal{W}^\perp$ of $\mathcal{W}$* as

$$\mathcal{W}^\perp := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{x}^T\mathbf{y} = 0 \text{ for all } \mathbf{y} \in \mathcal{W}\}.$$

(a) Prove that $\mathcal{W}^\perp$ is a subspace of $\mathbb{R}^n$.

(b) Prove that $\mathcal{W} \cap \mathcal{W}^\perp = \{\mathbf{0}\}$.

(c) Let A be a matrix such that $\mathcal{W} = R(A)$ where $R(A)$ is the range of A. Prove that $\mathcal{W}^\perp = N(A^T)$ where $N(A^T)$ is the null space of A^T.

6. (Nederlands) [**3+3+6+4 Punten.**]

Gegeven is de matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 5 & -1 \end{pmatrix}.$$

(a) Bepaal het karakteristieke polynoom van A.

(b) Bepaal de eigenwaarden van A.

(c) Bepaal de eigenvectoren van A.

(d) Ga na of A diagonaliseerbaar is. Bepaal in dat geval een matrix T zodat $T^{-1}AT$ diagonaal is.

6. (English) [**3+3+6+4 Points.**]

Let the matrix A be defined as

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 5 & -1 \end{pmatrix}.$$

(a) Determine the characteristic polynomial of A.

(b) Determine the eigenvalues of A.

(c) Determine the eigenvectors of A.

(d) Check whether A is diagonalizable. Determine in this case a matrix T such that $T^{-1}AT$ is diagonal.